CONCOURS A

MATHÉMATIQUES

Première épreuve

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 4

Matériel à prévoir par le candidat : règle à calcul; tables numériques usuelles.

Les cinq exercices proposés sont indépendants.

Les candidats sont priés de séparer nettement les différents exercices, et d'encadrer les résultats demandés.

Il sera tenu compte de la simplicité des solutions, de la clarté de la rédaction, et de la présentation.

I

Le plan est rapporté à un repère orthonormé Oxy.

On désigne par f une fonction continûment dérivable d'une variable et par (C) la courbe définie par l'équation $y = f(x)$.

1° Former l'équation de la normale à (C) en un point courant M de (C).

2° On désigne par I le point d'intersection de la normale à (C) en un point courant, avec la droite Oy.

Exprimer, à l'aide de x, f, f' :

a. L'ordonnée Y du point I.

b. La différence $d(x)$ des distances du point I aux deux points O et M $\quad d(x) = IO - IM$.

3° Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de $d(x)$ lorsque x tend vers zéro, et préciser éventuellement la partie principale de $d(x)$:

1er cas : $f(x) = x^2$

2e cas : $f(x) = x^3$

II

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $Oxyz$. On désigne par a une constante non nulle positive.

On donne le point fixe I $(a\sqrt{2}, 0, 0)$ et le cercle (Γ) défini par la représentation paramétrique suivante

$$(x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = a).$$

On désigne par M un point courant de (Γ).

1° *a.* Former des équations de la droite IM.

b. On désigne par A le point d'intersection de cette droite avec le plan d'équation $x = 0$, et par $(\mathcal{A})$ l'ensemble décrit par le point A lorsque le point M décrit le cercle (Γ).

Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathcal{A})$, et l'équation de $(\mathcal{A})$. Préciser sa nature; construire $(\mathcal{A})$.

2° On désigne par D la droite perpendiculaire en M au plan IOM.

a. Former des équations de D.

b. Déterminer l'enveloppe $(\mathcal{E})$ de la projection orthogonale de la droite D sur le plan d'équation $x = 0$. Préciser sa nature; construire $(\mathcal{E})$.

III

On considère l'équation différentielle (E) du premier ordre :

$$y'(x) + y(x) = \sin\omega x.$$

On désigne par ω un paramètre non nul, positif.

1° Montrer que l'équation (E) admet une solution particulière u que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$u(x) = A \cdot \sin(\omega x + \Phi)$$

les paramètres A et Φ dépendant uniquement de ω et satisfaisant aux conditions :

$$A > 0 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \Phi < \frac{\pi}{2}.$$

Préciser les expressions de A et Φ en fonction de ω.

Représenter graphiquement les variations de Φ en fonction de ω.

2° Déterminer l'intégrale générale de (E).

3° On désigne par V la solution particulière de (E) satisfaisant à la condition $V(0) = 0$.

Déterminer, en fonction de ω, la plus petite valeur de x pour laquelle on a l'inégalité :

$$|V(x) - u(x)| \leqslant 1.$$

IV

On désigne par f, et par F, deux fonctions continûment dérivables jusqu'au second ordre, des deux variables réelles indépendantes x et y. On suppose que la différentielle dF de la fonction F s'exprime à l'aide de x, y, de f et de sa différentielle df sous la forme suivante :

$$d\mathrm{F} = (y + 2f(x, y)) \cdot dx + (f(x, y) - x) \cdot dy - (2x + y) \cdot df$$

1° Montrer que les dérivées partielles f'_x et f'_y de f satisfont à la relation $(\mathcal{R})$:

$$f'_x - 2f'_y - 1 = 0$$

2° On désigne par φ une fonction d'une variable réelle notée u, dérivable continûment jusqu'au second ordre. On pose $u = 2x + y$.

a. Montrer que, pour tout choix de φ, la fonction f définie par la relation $f(x, y) = x + \varphi(2x + y)$ satisfait à la relation $(\mathcal{R})$.

b. Dans cette question, on pose : $\varphi(u) = \dfrac{1}{u}$.

Donner l'expression de F (x, y).

c. Montrer que, pour tout choix de φ, la différentielle dF s'exprime uniquement à l'aide de u, φ et des différentielles du et $d\varphi$.

Déterminer les fonctions φ pour lesquelles F est une fonction constante.

V

Le plan est rapporté à un repère orthonormé Oxy.

A toute fonction continue (notée f) d'une variable réelle u, on associe l'ensemble (noté F) des points du plan dont les coordonnées x, y satisfont à la relation :

$$\int_x^y f(u) \cdot du = 0 .$$

1° Montrer que l'ensemble F admet un axe de symétrie dont les points appartiennent à F.

2° Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble associé à la fonction donnée, et représenter graphiquement cet ensemble.

1er cas : La fonction f_1 est définie par la relation $f_1(u) = u^2 - 1$. Préciser les éléments de symétrie de F_1 et sa nature géométrique.

2e cas : La fonction f_2 est définie par les conditions :

$$u \leqslant 0 \qquad f_2(u) = 1 \quad , \quad u \geqslant 0 \qquad f_2(u) = \cos u .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail